Klasszikus mechanikai kéttestprobléma (kiegészítés) 1

A kinetikus energia felírható, mint a tömegközéppont kinetikus energiája ($M=m_1+m_2$ tömeg, $\vec{V}=\dot{\vec{R}}$ sebesség) + a belső mozgás kinetikus energiája. Ez utóbbi felírható <u>vagy</u> mint a két részecske kinetikus energiája a tömegközéppont rendszerében (levezetést l. az angol könyv 300. old. ill. a korábbi beszkennelt jegyzetet) <u>vagy</u> mint a relatív mozgás (μ effektív tömeg) kinetikus energiája. Ez utóbbi levezetése:

Bevezetjük a tömegközéppont és a relatív mozgás koordinátáit

$$\frac{m_1}{M}\vec{r}_1+\frac{m_2}{M}\vec{r}_2=\vec{R}$$ — ez írható mint $m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2=M\vec{R}$

és $\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r}$

Keressük meg $\vec{r}_1$-et és $\vec{r}_2$-t az

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2&=M\vec{R}\\ \vec{r}_1-\vec{r}_2&=\vec{r}\end{aligned}\right\}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszerből. Alkalm. Kramers képletét:

$$\Delta=\begin{vmatrix} m_1 & m_2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-m_1-m_2=-M$$

$$\vec{r}_1=\frac{\begin{vmatrix} M\vec{R} & m_2\\ \vec{r} & -1\end{vmatrix}}{-M}=\frac{-(M\vec{R}+m_2\vec{r})}{-M}=\vec{R}+\frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2=\frac{\begin{vmatrix} m_1 & M\vec{R}\\ 1 & \vec{r}\end{vmatrix}}{-M}=\frac{m_1\vec{r}-M\vec{R}}{-M}=\vec{R}-\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

$$\vec{v}_1=\dot{\vec{r}}_1=\dot{\vec{R}}+\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}=\vec{V}+\frac{m_2}{M}\vec{v}$$

$$\vec{v}_2=\dot{\vec{r}}_2=\dot{\vec{R}}-\frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}=\vec{V}-\frac{m_1}{M}\vec{v}$$

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2}\left[m_1 \left(V^2 + 2\frac{m_2}{M}\vec{v}\vec{V} + \frac{m_2^2}{M^2}v^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \, m_2 \left(V^2 - \frac{2m_1}{M}\vec{v}\vec{V} + \frac{m_1^2}{M^2}v^2 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(m_1+m_2)}_{M}V^2 + 0 + \frac{1}{2}m_1 m_2 \underbrace{\left(\frac{m_2}{M^2} + \frac{m_1}{M^2} \right)}_{\frac{1}{M}} v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M}v^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \quad \text{Q.E.D.}$$

Kvantummechanikai kéttestprobléma (kiegészítés)

A belső mozgás Hamilton-operátora meghatározható úgy is, hogy megkívánjuk, hogy a rendszer teljes impulzusa $\vec{P} = 0$ legyen. (A hullámfüggvény a teljes impulzus operátorának sajátfüggvénye 0 sajátértékkel.)

Vezessük be $\vec{r}_1$ és $\vec{r}_2$ helyett az új $\vec{r}$ és $\vec{\varrho}$ koordinátákat:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{\varrho} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

(Vagyis $\vec{\varrho}$ nincs a tömegekkel súlyozva, eltérően a tömegközéppont koordinátáitól.)

Láncszabály:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} = \frac{\partial}{\partial \vec{\varrho}}\frac{\partial \vec{\varrho}}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_1} = \frac{\partial}{\partial \vec{\varrho}} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} = \frac{\partial}{\partial \vec{\varrho}}\frac{\partial \vec{\varrho}}{\partial \vec{r}_2} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_2} = \frac{\partial}{\partial \vec{\varrho}} - \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

Megkívánjuk, hogy a teljes rendszer Ψ hullámfüggvénye a $\hat{\vec{P}} = \frac{\hbar}{i}(\nabla_1 + \nabla_2) \equiv \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \right)$ operátor sajátfüggvénye legyen 0 sajátértékkel. Ez azt jelenti, hogy

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} \right)\Psi = 2\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{\varrho}} = 0 \;,$$

vagyis Ψ nem függ $\vec{\varrho}$-tól. Tehát Δ_1 és Δ_2 kiszámításakor ebben a speciális esetben minden $\vec{\varrho}$ szerinti differenciálást elhagyhatunk, és csak az $\vec{r}$ szerintiek maradnak. Kapjuk

$$\left(\frac{1}{m_1}\Delta_1+\frac{1}{m_2}\Delta_2\right)\Psi\Big|_{P=0}=\underbrace{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}_{1/\mu}\Delta_r\Psi \;,$$

vagyis ha a rendszer teljes impulzusa zérus, akkor Hamilton-operátorában a kinetikus energia tag a μ redukált tömeggel való relatív mozgás kinetikus energiájára egyszerűsödik. (Szabad rendszer esetén a potenciális energia úgyis csak a relatív koordinátától függ.)