

## A tömegközéppont mozgásának leírása

A tömegközéppont a klasszikus mechanikában

Newton egyenletei  $N$  tömegpont esetén:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{f}_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$m_i$  az  $i$ -edik tömegpont tömege;

$\ddot{\vec{r}}_i$  — — — — — gyorsulás ("''-tal  
az idő szerint deriválást jelöljük)

$\vec{f}_i$  az  $i$ -edik tömegpontra ható erő.

Összeadva az egyenleteket:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{f}_i = \vec{F}$$

$\vec{F}$  a külső erő eredője, mivel Newton  
3. törvénye szerint a belső erő eredője 0.

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}$$

$M = \sum_i m_i$  a rendszer teljes tömege

$$M \sum_i \frac{m_i}{M} \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}$$

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F} \quad ; \quad \vec{R} = \sum_i \frac{m_i}{M} \vec{r}_i \text{ a tömeg-}$$

középpont vektora.

Ha a rendszer zárt,  $\vec{F} = 0$

$$M \ddot{\vec{R}} = 0 \longrightarrow \ddot{\vec{R}} = 0 \text{ : zárt rendszer}$$

tömegközéppontja nyugalomban van vagy egyenesvonalas  
egyenletes mozgást végez.

Vezessük be a tömegközéppont rendszeréhez ②  
 viszonyított relatív koordinátákat:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}; \text{ akkor } \ddot{\vec{r}}_i' = \ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{R}}.$$

Zárt rendszer esetén  $\ddot{\vec{R}} = 0$ , tehát

$$\ddot{\vec{r}}_i' = \ddot{\vec{r}}_i = \vec{f}_i,$$

azaz - mint ez jól ismert - a tömegközépponthoz  
 kötött inerciális koordinátarendszerben ugyanazok  
 a Newton-egyenletek érvényesek, mint a laborató-  
 riumi rendszerben. (A külsőre csak a kezdeti  
 feltételekben jelenik meg: a tömegközéppont rend-  
 szerben a rendszer teljes impulzusa 0, csak ennek  
 megfelelő kezdeti sebesség lehet.)

A kinetikus energia a belső mozgás kinetikus  
 energiájának és a tömegközéppont mozgásához tar-  
 tozó kinetikus energiának az összege lesz:

Jelöljük  $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ ,  $\vec{v}_i' = \dot{\vec{r}}_i'$ ,  $\vec{V}_R = \dot{\vec{R}}$ ; akkor az  
 $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$  definícióból következik  $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}$ ;  
 $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{R}} = \vec{v}_i' + \vec{V}_R$ . Tehát íratjuk:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in M} m_i \vec{V}_R^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \vec{V}_R$$

Az első két tag a belső (relatív) mozgás kinetikus  
 energiája, ill. a tömegközéppont (M tömeg!) kineti-  
 kus energiája, az utolsó pedig eltűnik:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i' \vec{V}_R \equiv M \vec{V}_R \sum_i \frac{m_i}{M} \vec{v}_i'$$

A  $\sum_i \frac{m_i}{M} \vec{v}_i'$  tag az a tömegközéppont sebessége a  
 tömegközéppont rendszerében, = 0. Valóban:

$$\sum_i \frac{m_i}{M} \vec{v}_i' = \sum_i \frac{m_i}{M} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{R}}) = \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{M} \dot{\vec{r}}_i}_{\dot{\vec{R}}} - \dot{\vec{R}} \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{M}}_1 = \dot{\vec{R}} - \dot{\vec{R}} = 0$$

Ugyanez a mértékeltés viszonyítható <sup>3</sup>  
a kvantummechanikában is (lás. Jacobi koordináták  
bevezetésével) csak jóval komplikáltabb -  
l. később röviden.

## A kétfest-probléma csökkentése egyetest problémára

### Klassikus mechanika

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{f}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{f}_2 \end{aligned}$$

Zárt rendszer  $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$  (Newton 3. törvénye)  
 $M = m_1 + m_2$

Tömegközéppont:

Mindhét egyenletet megkapjuk  $\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1 + m_2}$ -vel

és összeadva:

$$\frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0 \rightarrow \ddot{\vec{R}} = \frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \text{const}$$

(mint fent).

Relatív mozgás:

Atozza  $m_1$ -szegs ill.  $m_2$ -vel:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_1} \vec{f}_1$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_2} \vec{f}_2 = -\frac{1}{m_2} \vec{f}_1$$

zárk rendszer,  $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$ !

Kivonat egymásból:

4

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{f}_1 + \frac{1}{m_2} \vec{f}_1 = \underbrace{\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{\frac{1}{\mu}} \vec{f}_1$$

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  a relatív mozgás koordinátája,

$\mu$ : "redukált tömeg"

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad \left( \text{ha } m_1 = m_2, \mu = \frac{1}{2} m_1 \right)$$

Bohrefféleltes:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{f}_1 \quad - \text{ a relatív mozgás egyenlete.}$$

## Kvantummechanika

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) =$$

(írt rendszerben a pot. energia csak a részecskék relatív helyzetétől függ)

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}; \quad \text{hasonlóan } \Delta_2$$

Definiáljuk az  $\vec{R}$  ill.  $\vec{r}$  koordinátákat (tömegközéppont ill. relatív mozgás)

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = i x + j y + k z$$

$$\vec{R} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 = i X + j Y + k Z$$

$$x = x_1 - x_2 ; \text{ hasonlóan } y, z$$

$$X = \frac{m_1}{M} x_1 + \frac{m_2}{M} x_2 ; \text{ hasonlóan } Y, Z$$

Vizsgáljuk az

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \quad \text{önműt úgy,$$

hogy  $\Psi$ -t az  $\vec{r}$  és  $\vec{R}$  koordináták

függvényének tekintjük;  $x_1$ -nek és  $x_2$ -nek (ill. a többi koordinátáinak) csak közvetett

függvénye. Láncszabály<sup>\*</sup>:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{m_1}{M} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial X} \right) \Psi$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 \Psi =$$

$$= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{m_1}{M} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \left( \frac{m_1}{M} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right] \Psi$$

$$^* \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0 \quad \text{stb. kiküszöbölve}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{mivel} \\ x = x_1 - x_2 \\ X = \frac{m_1}{M} x_1 + \frac{m_2}{M} x_2 \end{array} \right]$$

Hasonlóan kapjuk  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}$ -t is, csak figye-  
 lmebe vessük, hogy  $\frac{\partial x}{\partial x_1} = 1$ ;  $\frac{\partial x}{\partial x_2} = -1$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \left( -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_2}{M} \frac{\partial}{\partial X} \right) \psi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{m_2}{M} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \left( \frac{m_2}{M} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right] \psi$$

Összeadva a végleges deriváltak tartalmának  
 tehát kiírva:

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} =$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0 + \frac{m_1 + m_2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right] \psi =$$

$$= \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{M} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) \psi$$

amiel  
 $m_1 + m_2 = M$   
 $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

Hasonlóan az  $y$  és  $z$  irányokban.

Teljes:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\text{rel.}} - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\text{középp.}} + U(\vec{r})$$

$\vec{r} \equiv \vec{r}_{\text{relatív}}$

2-vel lilt rēvencē eodēi epy  
 jūhstunt el, hopy elōai ar elō's  
 keth'iel deimh at a relat'is kor-  
 dividuals ill. a bel rēvencē kōny-  
 kōiprouināh koordinat'ia, myiā  
 at elō' keth's kōnykōiproui's (p kōnyg.)  
 is a kōnyadik rēvencē eodēi hopyi's  
 vepre upvencet, is isy kōnyk's. It vithōn  
 vāh kōnyk' cilya Facet-kōnyvencet  
 epy ar epy rēvencē kōnykōiprou-  
 jūh kōnyvencet'ail adyā. About an ext  
 ar elō'vāit kōnyk'vencet' vāh vopyer  
 alkōnyvencet', vūicel vāh vānyvencet'ia's  
 ar epy vānyvencet' vāh, peclig ar  
 elō'vencet' vopykōnyk'vencet'vencet', is  
 ext cēlvencet' epyk'ic vopyvencet'ia. Vūicel  
 a kōnykōiprouit vāhā vopyvencet' vepre,  
 vānyvencet' alkōnyvencet' vāh a  
 vānyvencet' alkōny vānyvencet' vāh vānyvencet'  
 vānyvencet' vānyvencet' (L<sup>2</sup>-vāny, vāh vāny-  
 vāny vānyvencet'ia's - vānyvencet'ia's - vānyvencet'  
 vānyvencet'ia's), ar vānyvencet' vānyvencet'ia's  
 vāh, hopy vānyvencet'ia's a kōnyvencet'ia's  
 vānyvencet'ia's, vāh a kōnykōiprouit vāny-  
 vānyvencet'ia's vāh.